

Tema 1

Repaso de algunos conceptos de mecanica clasica

Alfonso V. Ramallo

1 Ecuaciones de movimiento

Supongamos que tenemos un sistema mecanico descrito por unas coordenadas generalizadas $q_i(t)$ y sus correspondientes derivadas $\dot{q}_i(t) = \frac{dq_i}{dt}$, donde el indice i puede tomar tantos valores como el numero N de grados de libertad del sistema. La dinamica del sistema se describe por una funcion lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Las ecuaciones de movimiento pueden obtenerse a partir del principio de Hamilton o de minima accion, que establece que la accion S , definida como

$$S = \int L dt , \quad (1.1)$$

sea extremal, es decir que $\delta S = 0$. Este principio variacional conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0} \quad (i = 1, \dots, N) . \quad (1.2)$$

El momento canonico conjugado a la coordenada generalizada q_i se define como:

$$\boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \quad (i = 1, \dots, N) . \quad (1.3)$$

La hamiltoniana $H = H(q_i, p_i, t)$ del sistema se obtiene a partir de la transformada de Legendre de L :

$$\boxed{H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L} \quad (1.4)$$

Mediante $H = H(q_i, p_i, t)$ la dinamica del sistema se describe por medio de las ecuaciones canonicas de Hamilton:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \quad (i = 1, \dots, N) . \quad (1.5)$$

Observemos que las ecuaciones de Hamilton son $2N$ ecuaciones diferenciales de primer orden, a comparar con las ecuaciones de Euler-Lagrange que son N ecuaciones de segundo orden. De hecho, en el formalismo hamiltoniano de la mecanica clasica se considera que coordenadas y momentos son variables independientes. Se

define el **espacio de fase** como un espacio de dimension $2N$ cuyas coordenadas son (q_i, p_i) . El vector de posicion en este espacio lo denotaremos por $\vec{\eta}$. Sus componentes son:

$$\eta_i = q_i , \quad \eta_{i+N} = p_i , \quad (i = 1, \dots, N) . \quad (1.6)$$

En forma de matriz columna, podemos escribir $\vec{\eta}$ como:

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix} . \quad (1.7)$$

La integracion de las ecuaciones de Hamilton permite obtener $\vec{\eta} = \vec{\eta}(t)$, es decir la trayectoria en el espacio de fase. Asi pues, el estado de un sistema en mecanica clasica esta determinado por un vector cuya evolucion temporal esta generada por la hamiltoniana. En mecanica cuantica nos encontraremos una situacion similar, aunque el vector que determina el estado es muy diferente.

Si $u = u(q_i, p_i, t)$ y $v = v(q_i, p_i, t)$ son dos funciones en el espacio de fase, su corchete de Poisson $\{u, v\}_P$ se define como:

$$\boxed{\{u, v\}_P \equiv \sum_i \left[\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right]} \quad (1.8)$$

Observemos que los corchetes de Poisson de coordenadas y momentos canonicos son:

$$\boxed{\{q_i, q_j\}_P = \{p_i, p_j\}_P = 0 , \quad \{q_i, p_j\}_P = \delta_{ij}} \quad (1.9)$$

Ademas, los corchetes de q_i y p_i con la hamiltoniana son:

$$\{q_i, H\}_P = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \{p_i, H\}_P = -\frac{\partial H}{\partial q_i} , \quad (1.10)$$

y, en consecuencia, las ecuaciones canonicas de Hamilton pueden escribirse en forma compacta como:

$$\boxed{\frac{d\eta_i}{dt} = \{\eta_i, H\}_P} \quad (1.11)$$

Esta ecuacion determina la trayectoria en el espacio de fase, es decir la evolucion temporal. En mecanica cuantica encontraremos una cantidad analoga a los corchetes de Poisson (los conmutadores entre operadores). Si $A = A(q_i, p_i, t)$ es una funcion arbitraria de las coordenadas, momentos y el tiempo, su derivada temporal total puede ponerse como:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}_P . \quad (1.12)$$

2 Simetrias y leyes de conservacion

Otro aspecto importante de la mecanica clasica es la conexion entre simetrias y leyes de conservacion. Se puede utilizar esta conexion para definir algunas cantidades fundamentales en fisica, algo que sera muy util en la construccion de la mecanica cuantica. Asi, la **homogeneidad del tiempo** implica que la energia de un sistema aislado (que no interactua con el exterior al mismo) se conserva. En efecto, en un sistema aislado la lagrangiana no puede depender explicitamente del tiempo:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 . \quad (2.1)$$

Ahora bien, como puede demostrarse en general que:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} , \quad (2.2)$$

ello implica que H es una constante de movimiento (la energia) para estos sistemas aislados. Del mismo modo, la **homogeneidad del espacio** implica que la lagrangiana de un sistema aislado no puede cambiar si trasladamos las particulas de este por una misma cantidad. Supongamos que nuestras coordenadas generalizadas son las coordenadas cartesianas \vec{r}_i de las particulas. Hagamos una traslacion infinitesimal del sistema, en la cual las posiciones de las particulas cambian por una misma cantidad $\delta\vec{r}$:

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \delta\vec{r} , \quad (2.3)$$

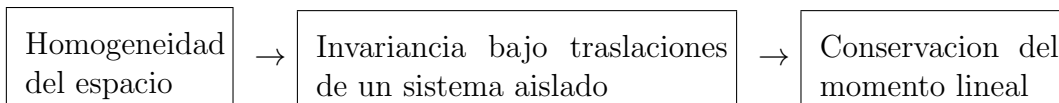
mientras que las velocidades permanecen constantes. Dado que $\delta\vec{r}$ es infinitesimal, tenemos que la variacion de la lagrangiana es:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta\vec{r} = \delta\vec{r} \cdot \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) . \quad (2.4)$$

Si $\delta L = 0$ para cualquier $\delta\vec{r}$, es decir si L es invariante bajo traslaciones, se sigue que el momento lineal total:

$$\vec{p} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} , \quad (2.5)$$

es constante. Asi pues, tenemos:



De forma similar, todas las direcciones del espacio deben de ser equivalentes. Esta es la propiedad de **isotropia del espacio** y significa que las propiedades de un sistema aislado no cambian si efectuamos una rotacion en el espacio del sistema como un conjunto. Bajo una rotacion infinitesimal de angulo $\delta\theta$ alrededor de un

eje que tenga la direccion del vector unitario \vec{n} , las coordenadas \vec{r}_i y las velocidades $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ de las particulas cambian como:

$$\delta\vec{r}_i = \delta\theta \vec{n} \times \vec{r}_i, \quad \delta\vec{v}_i = \delta\theta \vec{n} \times \vec{v}_i. \quad (2.6)$$

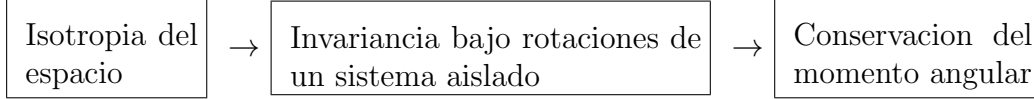
El cambio de la lagrangiana cuando se efectua esta rotacion es:

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta\vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot \delta\vec{v}_i \right] = \delta\theta \sum_i \left[\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{n} \times \vec{r}_i + \vec{p}_i \cdot \vec{n} \times \vec{v}_i \right] = \\ &= \delta\theta \vec{n} \cdot \sum_i \left[\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \vec{v}_i \times \vec{p}_i \right] = \delta\theta \vec{n} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Como $\delta\theta$ y \vec{n} son arbitrarios, se sigue que, para un sistema aislado, el momento angular total \vec{L} se conserva:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \text{constante}. \quad (2.8)$$

Por consiguiente, tenemos las siguientes relaciones entre la simetria de rotacion y el momento angular total:



3 Generadores

Para explorar mas en detalle la relacion entre traslaciones espaciales y el momento lineal consideremos, para simplificar el formalismo, un sistema constituido por una sola particula. Bajo una traslacion infinitesimal la posicion \vec{r} y el momento \vec{p} de la particula cambian como:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{\epsilon}, \quad \vec{p} \rightarrow \vec{p}' = \vec{p}, \quad (3.1)$$

siendo $\vec{\epsilon}$ un vector constante infinitesimal. Entonces, si $\delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ y $\delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p}$, tenemos:

$$\delta\vec{r} = \vec{\epsilon}, \quad \delta\vec{p} = 0. \quad (3.2)$$

Sea $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$ el vector de posicion en el espacio de fases y sea G_T la funcion:

$$G_T = \vec{\epsilon} \cdot \vec{p}. \quad (3.3)$$

Veamos que, bajo una traslacion espacial, el cambio de $\vec{\eta}$ se puede escribir como:

$$\delta\vec{\eta} = \{\vec{\eta}, G_T\}_P. \quad (3.4)$$

Se dice entonces que G_T es el **generador de la traslacion infinitesimal**. Probemos esta ultima relacion utilizando los corchetes de Poisson canonicos:

$$\begin{aligned} \{r_m, G_T\}_P &= \sum_n \epsilon_n \{r_m, p_n\}_P = \epsilon_m = \delta r_m , \\ \{p_m, G_T\}_P &= \sum_n \epsilon_n \{p_m, p_n\}_P = 0 = \delta p_m . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Observemos que el generador de las traslaciones G_T no es mas que $|\vec{\epsilon}|$ multiplicado por la componente del momento lineal a lo largo de la direccion de traslacion.

Obtengamos ahora el generador de las rotaciones espaciales en forma similar a como lo obtuvimos para las traslaciones. Para simplificar consideremos de nuevo un sistema de una partícula y efectuemos una rotacion alrededor del eje coordenado z de angulo ϵ , siendo ϵ infinitesimal. Bajo esta rotacion las coordenadas (x, y) de la partícula cambian como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \epsilon & -\text{sen } \epsilon \\ \text{sen } \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \epsilon y \\ y + \epsilon x \end{pmatrix} , \quad (3.6)$$

mientras que la coordenada z no cambia. Asi pues:

$$\delta x = -\epsilon y , \quad \delta y = \epsilon x , \quad \delta z = 0 . \quad (3.7)$$

De forma similar la componentes del momento lineal cambian como:

$$\delta p_x = -\epsilon p_y , \quad \delta p_y = \epsilon p_x , \quad \delta p_z = 0 . \quad (3.8)$$

Veamos que el generador de esta transformacion es:

$$\boxed{G_{R_z} = \epsilon(x p_y - y p_x)} \quad (3.9)$$

es decir G_{R_z} es proporcional a la componente z del momento angular \vec{L} . Para ello tenemos que probar que el cambio del vector de posicion en el espacio de fases correspondiente a la rotacion espacial se puede escribir como:

$$\delta \vec{\eta} = \{\vec{\eta}, \epsilon L_z\}_P . \quad (3.10)$$

Probemoslo para las diferentes componentes de \vec{r} :

$$\begin{aligned} \{x, \epsilon L_z\}_P &= \epsilon \{x, x p_y - y p_x\}_P = -\epsilon y \{x, p_x\}_P = -\epsilon y , \\ \{y, \epsilon L_z\}_P &= \epsilon \{y, x p_y - y p_x\}_P = \epsilon x \{y, p_y\}_P = \epsilon x , \end{aligned} \quad (3.11)$$

y , trivialmente, $\{z, \epsilon L_z\}_P = 0$. De forma similar para las componentes de \vec{p} :

$$\begin{aligned} \{p_x, \epsilon L_z\}_P &= \epsilon \{p_x, x p_y - y p_x\}_P = \epsilon p_y \{p_x, x\}_P = -\epsilon p_y , \\ \{p_y, \epsilon L_z\}_P &= \epsilon \{p_y, x p_y - y p_x\}_P = -\epsilon p_x \{p_y, y\}_P = \epsilon p_x , \end{aligned} \quad (3.12)$$

y $\{p_z, \epsilon L_z\}_P = 0$. En general para una rotacion de angulo ϵ en torno a la direccion del vector unitario \vec{n} , el generador es:

$$\boxed{G_{R_{\vec{n}}} = \epsilon \vec{n} \cdot \vec{L}}, \quad (3.13)$$

es decir es **proporcional a la componente del momento angular a lo largo del eje de rotacion**.

Observemos que, en este lenguaje de los generadores infinitesimales, la hamiltoniana es el generador de las traslaciones temporales o, dicho de otra forma, de la evolucion temporal del sistema. En efecto, sea:

$$\delta_t \vec{\eta} \equiv \vec{\eta}(t + \delta t) - \vec{\eta}(t) . \quad (3.14)$$

Si δt es pequeño podemos expandir $\vec{\eta}(t + \delta t)$ en serie de Taylor y quedarnos a primer orden en δt . Entonces, $\delta_t \vec{\eta}$ se puede escribir como:

$$\delta_t \vec{\eta} = \delta t \frac{d\vec{\eta}}{dt} . \quad (3.15)$$

De las ecuaciones canonicas de Hamilton se sigue entonces que:

$$\delta_t \vec{\eta} = \{\vec{\eta}, \delta t H\}_P , \quad (3.16)$$

que es formalmente similar a las ecuaciones correspondientes a la traslacion y a la rotacion. Asi pues tenemos:

Evolucion temporal \rightarrow generada por H
Traslacion espacial \rightarrow generada por \vec{p}
Rotacion espacial \rightarrow generada por \vec{L}

Como veremos esta conexcion transcende a la mecanica clasica y es tambien valida en la mecanica cuantica.